1. <u>Test stałości wariancji składników zakłócających White'a</u> $\begin{cases} H_0\text{:}\ E\xi_t^2 = \sigma_\xi^2 = const. \\ H_A\text{:}\ E\xi_t^2 \neq const. \end{cases}$

H_0: składniki zakłócające mają stałe wariancje;

H_A:, wariancja składników zakłócających zmienia się w czasie.

Niech modelem zmiennej endogenicznej będzie:

$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + ... + \beta_K x_{tK} + \xi_t;\ (t = 1,...,T)$.

Relacja pomocnicza służąca testowaniu hipotezy zerowej o stałości wariancji otrzymuje postać:

$$\hat{\xi}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_{t1} + ... + \gamma_K x_{tK} + \gamma_1^* x_{t1}^2 + ... + \gamma_k^* x_{tK}^2 + \gamma_{12} x_{t1} x_{t2} + ... + \gamma_{K-1,K} x_{t,K-1} x_{tK} + \varepsilon_t,$$

gdzie: $\hat{\xi}_t = y_t - \hat{y}_t$ jest resztą z oszacowania MNK liniowego modelu ekonometrycznego.

Oznaczmy liczbę parametrów w relacji pomocniczej jako $N > K$.

$$\chi_N^2(\gamma) = TR^2 \overset{asymp.}{\sim} \chi_N^2$$

- **jeżeli $\chi_N^2(\gamma) \leq \chi_N^2(\alpha)$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej,** że współczynniki strukturalne w relacji pomocniczej są równe zeru; możemy powiedzieć, że nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy, iż wariancja składników zakłócających jest stała w czasie,
- **jeżeli $\chi_N^2(\gamma) > \chi_N^2(\alpha)$, hipoteza zerowa jest odrzucana na rzecz hipotezy**, że współczynniki strukturalne w relacji pomocniczej istotnie różnią się od zera, zatem wariancja składników zakłócających zmienia się wraz ze zmianami poziomów zmiennej endogenicznej.

2. <u>Weryfikacja hipotezy o jednorodności wariancji składników losowych (test Goldfelda-Quandta)</u>

Hipotezy: $H_0:\ E\xi_t^2 = \sigma_\xi^2 = \text{const}$

$H_1:\ E\xi_t^2 \neq \sigma_\xi^2$

Statystyka testowa: $F = \dfrac{\hat{\sigma}_{\xi_A}^2}{\hat{\sigma}_{\xi_B}^2}$, gdy $\hat{\sigma}_{\xi_A}^2 > \hat{\sigma}_{\xi_B}^2$

$F = \dfrac{\hat{\sigma}_{\xi_B}^2}{\hat{\sigma}_{\xi_A}^2}$, gdy $\hat{\sigma}_{\xi_B}^2 > \hat{\sigma}_{\xi_A}^2$

Gdzie: $\hat{\sigma}_{\xi_A}^2$ – wariancja reszt dla podpróby A,

$\hat{\sigma}_{\xi_B}^2$ – wariancja reszt dla podpróby B.

Wartość krytyczna: $F_{r_B}^{r_A}(\alpha)$, gdy $\hat{\sigma}_{\xi_A}^2 > \hat{\sigma}_{\xi_B}^2$

$F_{r_A}^{r_B}(\alpha)$, gdy $\hat{\sigma}_{\xi_B}^2 > \hat{\sigma}_{\xi_A}^2$

aGdzie: $r_A = n_A - K - 1$ (n_A – liczebność podpróby A)

$r_B = n_B - K - 1$ (n_B – liczebność podpróby B)

Jeśli zachodzi nierówność

$F > F_{r_B}^{r_A}(\alpha)$ dla $\hat{\sigma}_{\xi_A}^2 > \hat{\sigma}_{\xi_B}^2$

lub

$F > F_{r_A}^{r_B}(\alpha)$ dla $\hat{\sigma}_{\xi_B}^2 > \hat{\sigma}_{\xi_A}^2$,

to odrzucamy H_0 na rzecz H_1.

<u>Uwagi</u>: Standardowo dzieli się próbę na dwie równoliczne (o ile to możliwe) podpróby.

3. Badanie autokorelacji rzędu 1-go składnika losowego

Test Durbina-Watsona

Hipotezy: $H_0: \ \rho_1 = 0$ lub $H_0: \ \rho_1 = 0$

$H_1: \ \rho_1 > 0$ $H_1: \ \rho_1 < 0$

Statystyka testowa: $DW = \dfrac{\sum_{t=2}^{T}\left(\hat{\xi}_t - \hat{\xi}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}\hat{\xi}_t^2}$

Statystyka DW może przyjmować wartości z przedziału $(0,4)$. Ponadto $DW \approx 2\cdot(1-\hat{\rho}_1)$.

Wartości krytyczne d_L oraz d_U odczytujemy z tablic rozkładu DW, które zależą od liczby obserwacji i od liczby zmiennych objaśniających modelu.

– Jeśli $DW \in (0,2)$, to podejrzewamy dodatnie skorelowanie składników losowych $(\hat{\rho}_1 > 0)$.

  Wtedy: jeśli $DW < d_L$, to odrzucamy H_0 na rzecz H_1,

  jeśli $DW > d_U$, to brak jest podstaw do odrzucenia H_0 na rzecz H_1,

  jeśli $DW \in \langle d_L, d_U \rangle$, to test nie rozstrzyga.

– Jeśli $DW \in (2,4)$, to podejrzewamy ujemne skorelowanie składników losowych $(\hat{\rho}_1 < 0)$.

  Obliczamy $DW^* = 4 - DW$. Wtedy:

  jeśli $DW^* < d_L$, to odrzucamy H_0 na rzecz H_1,

  jeśli $DW^* > d_U$, to brak jest podstaw do odrzucenia H_0 na rzecz H_1,

  jeśli $DW^* \in \langle d_L, d_U \rangle$, to test nie rozstrzyga.

Test *h*-Durbina

Ponieważ test Durbina-Watsona nie ma zastosowania w przypadku modeli dynamicznych z opóźnioną zmienną endogeniczną, został opracowany alternatywny test, mający zastosowanie w przypadku tego modelu.

Zatem badając autokorelację składników losowych modelu:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \ldots + \beta_K x_{tK} + \gamma_1 y_{t-1} + \xi_t$$

Możemy stosować test *h*-Durbina.

Hipotezy: $H_0: \ \rho_1 = 0$

$H_1: \ \rho_1 \neq 0$

Statystyka testowa: $h = \hat{\rho}_1 \cdot \sqrt{\dfrac{T}{1 - T\hat{\sigma}^2(\hat{\gamma}_1)}}$

Gdzie: $\hat{\rho}_1$ – współczynnik autokorelacji reszt MNK,

$\hat{\sigma}^2(\hat{\gamma}_1)$ – empiryczna wariancja błędu estymacji parametru γ_1,

T – liczebność próby.

Wartość krytyczna:

z_α – dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego.

Jeśli zachodzi nierówność: $|h| > z_\alpha$, to odrzucamy H_0 na rzecz H_1.

4. Normalność rozkładu składnika losowego

$$\begin{cases} H_0: \ \xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2) \\ H_A: \ \xi_t \nsim N(0, \sigma_\xi^2) \end{cases}$$

Statystykami, którą wykorzystywać będziemy do sprawdzenia tej hipotezy są:

- statystyka Jarque-Bery (JB),
- statystyka Doornika-Hansena (DH).

W przypadku, gdy w modelu występuje wyraz wolny, a zatem suma reszt i średnia reszt z oszacowania MNK są równe zero, statystyka Jarque-Bery definiowana jest następująco:

$$JB = T\{\frac{1}{6}c_1^2 + \frac{1}{24}(c_2 - 3)^2\},$$

gdzie: $c_1 = \frac{m_3}{m_2^{(3/2)}}$ - współczynnik skośności, $c_2 = \frac{m_4}{m_2^2}$ - współczynnik kurtozy, $m_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\xi}_t^i$, $(i = 1,2,3,4)$ - próbkowy moment centralny reszt z oszacowania MNK.

Statystyka Doornika-Hansena definiowana jest natomiast w postaci:

$$DH = z_1^2 + z_2^2$$

gdzie: z_1 oraz z_2 są odpowiednio: transformowanym współczynnikiem skośności oraz transformowanym współczynnikiem kurtozy

Jeśli składniki losowe mają rozkłady normalne, wtedy statystyki JB oraz DH mają rozkłady $\chi^2(2)$.

- **jeżeli wartości statystyk JB lub DH nie większe od $\chi_\alpha^2(2)$,** to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, że składniki zakłócające modelu mają rozkłady normalne,
- **jeżeli wartość statystyk JB lub DH są większe od** $\chi_\alpha^2(2)$, to hipotezę zerową odrzucamy na korzyść alternatywnej, że składniki zakłócające modelu nie mają rozkładów normalnych.

5. Test specyfikacji RESET

RESET = Regression error specification test
H_0: postać modelu jest liniowa

H_A:, postać modelu nie jest liniowa.

Zakładamy, że liniowa postać modelu jest następująca:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \ldots + \beta_K x_{tK} + \xi_t; \ (t = 1,\ldots,T)$$

gdzie K jest liczbą zmiennych objaśniających modelu podstawowego.

Szacujemy model pomocniczy,

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \ldots + \beta_K x_{tK} + \alpha_1 y_t^2 + \alpha_2 y_t^3 + \varsigma_t; (t = 1,\ldots,T)$$

Statystyka testowa (gdzie h ilość dołączonych zmiennych w modelu pomocniczym, w tym przypadku h=2):

$$F = \frac{\left(\sum \xi_t^2 - \sum \varsigma_t^2\right)/(h-1)}{\sum \varsigma_t^2 / (T - K - h)} \quad F \sim F(\alpha, r_1, r_2)$$

$$r_1 = (h-1); r_2 = (T - K - h)$$

Jeżeli $F \geq F(\alpha, r_1, r_2)$, to odrzucamy hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej. Model ma postać nieliniową.